

Lineare Algebra

Reguläre Matrix

Besitzt eine Inverse:
 (A: beliebige quadratische Matrix, E: Einheitsmatrix)
 (A|E) <- Gauß für A (E mitumformen)
 => (E|A⁻¹)
 E wird zur Inversen A⁻¹
 Es gilt weiterhin: A A⁻¹ = E

Singuläre Matrix

Quadratische Matrix ohne Inverse (det(A)=0)

RL-Zerlegung

Man nimmt P (zu Beginn die Einheitsmatrix), und eine gegebene Matrix A.
 Nun macht man einen modifizierten Gauß-Algorithmus, in dem man an Stelle der Nullen, das negative der für die Elimination durchgeführten Operation notiert. Ausserdem soll diese Zahl um Missverständnisse zu vermeiden farbig markiert werden. Die für die Erzielung der „Dreiecksform“ nötigen Zeilenumformungen führt man analog in P (Einheitsmatrix) durch.
 Den unteren, linken Teil von A fügen wir nun in eine Einheitsmatrix ein und erhalten die Matrix L der Form:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_1 & 1 & 0 \\ k_2 & k_3 & 1 \end{pmatrix} \text{ sowie die Matrix } R = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \text{ welche den}$$

oberen Rechten Teil der umgeformten Matrix enthält.
 Es gilt von nun an der Bezug: PA=LR
 Anwendung: A \vec{x} = \vec{b} => L \vec{y} = \vec{b} => R \vec{x} = \vec{y}

QR-Zerlegung

Es gelte: A \vec{x} = \vec{c} = \vec{r}
 Wobei A gegeben sei und x die Werte erfrage.
 Strecken a,b,c -> x=[a,b,c]
 Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a-280=r_1 \\ a+b-390=r_2 \\ a+c-400=r_3 \\ b+c-210=r_4 \\ c-118=r_5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 390 \\ 400 \\ 210 \\ 118 \end{pmatrix} = \vec{r}$$

Normalgleichungen: A^T A \vec{x} = A^T \vec{c}

Wo

$$A^T A \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A^T \vec{c} = \begin{pmatrix} 1070 \\ 600 \\ 728 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Gauß Forme (A}^T \text{A|A}^T \text{c) mit Gauß}$$

Kreuzprodukt

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{1(n-1)} \\ a_{2(n-1)} \\ \vdots \\ a_{n(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \dots \times \vec{a}_{n-1} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vec{e}_2 & a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n & a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vec{e}_2 & a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n & a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} \end{pmatrix}$$

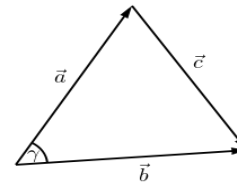
Skalarprodukt

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a}^T \vec{b} = \vec{b}^T \vec{a}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha(\vec{a}, \vec{b})$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos \gamma$$



Determinante

1-D ... 3-D

$$A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = \det(a_{11}) = a_{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

Laplacescher Entwicklungssatz

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der j-ten Spalte)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der i-ten Zeile)}$$

Beispiel nach erster Zeile

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 2 = 3$$

Kern einer Matrix bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \text{Kern}(A) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Also einfach das Ergebnis, wenn man einen vektor mit A multipliziert und dann gleich Null setzt. Welcher Vektor muss Null ergeben? Dieser Vektor ist dann der Kern.

Bild einer Matrix bestimmen

2 Möglichkeiten:

- Wenn man die linear unabhängigen Spalten einer Matrix bestimmen will, führt man einfach elementare Spaltenumformungen (Addition von vielfachen einer Spalte zu einer andern; vertauschen von Spalten...) durch.
- Wenn die elementaren Zeilenumformungen mehr liegen, der kann auch wie folgt vorgehen:
 Man transponiert die Matrix, wendet Gauß an und das, was nicht zur Nullzeile wird, sind die Bilder der Matrix.

Rang einer Matrix bestimmen

Einfach Gauß machen: Sobald man die Dreiecksform hat, zählt man die Zeilen. Die Anzahl linear unabhängiger Gleichungen ist die Dimension.

Eigenwert/Eigenvektor

$$A \cdot \underbrace{\vec{v}}_{\text{Eigenvektor}} = \underbrace{\lambda}_{\text{Eigenwert}} \cdot \vec{v}$$

Um was für einen Wert ändert sich der Vektor,

wenn man ihn mit der Matrix multipliziert? (Streckung)

Achtung Drehung: Der Eigenwert wird komplex!

Givensrotation

Allgemeine Givens-Rotations-Matrix:

$$U_{pq}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & 0 & \cdots & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & 0 & \cdots & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine $n \times n$ -Matrix $U_{pq}(\varphi)$, $1 \leq p < q \leq n$

Ist eine Einheitsmatrix wo die $\cos \varphi, \sin \varphi, -\sin \varphi$ entsprechend dem Bild die Einsen und Nullen ersetzen.

Die beiden Kosinüsse liegen auf der Diagonale, die Sinüsse sind Senkrecht drüber/drunter.

Spur einer Matrix bestimmen

$$\text{Spur}(A) = \text{Trace}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Wenn die Spur 0 ist, nennt man die Matrix „spurfrei“

Komplexe Analysis

Elementare Definitionen

Für alle Definitionen gelte $f, g \in \mathbb{C}$:
Skalarprodukt von Funktionen:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{T} \int_c^{c+T} \overline{f(t)} \cdot g(t) dt \neq \langle g, f \rangle, c \in \mathbb{R}$$

Norm einer Funktion:

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} \cdot f(t) dt}$$

Produkt von Funktionen:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l$$

$$f(z)g(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r, |z| < \rho \quad \text{Wenn } f, g \text{ konvergent } fg \text{ ebenfalls}$$

$$c_r = \sum_{k+l=r} a_k b_l = \sum_{l=0}^r a_{r-l} b_l$$

Komplexe Winkelfunktionen:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \Rightarrow |e^{x+iy}| = e^x$$

$$\Rightarrow \arg(e^{x+iy}) = y$$

$$\cos(i) = \frac{e^{-1} + e^1}{2}, \sin(i) = \frac{e^{-1} - e^1}{2i} \quad (\cos(i) > 1, \sin(i) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

Kehrwert:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \Re \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2}, \Im \frac{1}{z} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Komplexer Logarithmus

$$\log(z) := \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

Argument

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\left(\frac{\Im z}{\Re z}\right) \Rightarrow \operatorname{Arg} z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Begriffe

- Singularität: Nicht definiertes Ergebnis der Funktion
- Evau: Einschwing/Einschaltvorgang
- Holomorph: An jedem Punkt aus der Definitionsmenge komplex differenzierbar. Erfüllt wenn gilt:

$$f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \wedge \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x} \quad \text{CR-DGL}$$

- Meromorph: Eine Funktion, die sich als Bruch darstellen läßt, wobei Zähler und Nenner holomorph sind.

- Isolierte Singularitäten: Rund um die Singularität holomorph. Genauere Typ kann man aus der Laurentreihe von f an z_0 ablesen: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$
 - Hebbare Singularität wenn der Hauptteil ($a_n=0, n<0$) verschwindet
 - Polstelle k -ter Ordnung wenn der Hauptteil abbricht ($a_n=0, n<-k$)
 - Wesentliche Singularität wenn: Weder Polstelle noch hebbar

Residuensatz

Ist f in G analytisch, bis auf isolierte Singularitäten, ist C eine einfach geschlossene, stückweise glatte Kurve in G , die keine Singularitäten berührt, und die ganz in G liegt. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \sum_n \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Wie findet man das Residuum?

- Ist der Pol von erster Ordnung, so bestimmt man $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z)$

- Bei Polen n -ter Ordnung $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-z_0)^n f(z))$

- Hat f die Form $\frac{g(z)}{h(z)}$, wobei $h(z_0)=0$ und $h'(z_0) \neq 0$ findet man das Residuum durch $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Beispiel:

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z-1)^3}, 1\right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-1)^3 \frac{e^z}{(z-1)^3} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} e^z = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2} e^z = \frac{e}{2}$$

$\operatorname{ord}(f, 1) = -3 \Rightarrow$ Pol 3-ter Ordnung

$\operatorname{ord}(f, a) = -k \Rightarrow$ Pol k -ter Ordnung

Die Cauchy-Integralformel

Sei die Funktion f analytisch auf dem Gebiet G . C sei eine geschlossene Kurve, die samt ihrem Innern in G enthalten ist. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z'-z} dz$$

Und die verallgemeinerte Cauchy-Integralformel:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}} dz$$

Die Aussage des Satzes ist, daß man aus der Kenntnis der Funktionswerte am Rand des Analytizitätsgebiets alle Funktionswerte im Innern bestimmen kann.

Beispiel:

$$\oint_C \frac{\sin(z)}{2z-\pi} dz, \text{ Radius: } r=2, \text{ Pol: } z=\frac{\pi}{2} \text{ (Pol im inneren des Kreises)}$$

$$z_0 = \frac{\pi}{2}, f(z) = \frac{1}{2} \sin z \Rightarrow 2\pi i \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i\pi$$

Laurent-Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Beispiel:

$$f(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-2)(z-5)} \Rightarrow_{z_0=5} f(w) = \frac{(w+6)^2}{(w+3) \cdot w^2} = \frac{w^2+12w+36}{(w+3) \cdot w^2}$$

$$\Rightarrow_{\text{PBZ}} f(w) = \frac{1}{w+3} + \frac{12}{w^2}$$

$$|w| < 3: \frac{1}{w+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{w}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^n}{3^{n+1}}$$

$$|w| > 3: \frac{1}{w+3} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{w}\right)} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{w^{n+1}}$$

$$\left[0 < |w| < 3 \Leftrightarrow 0 < |z-5| < 3\right]: f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-5)^n}{3^{n+1}} + \frac{12}{(z-5)^2}$$

$$\Rightarrow a_n = (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{Hebbare Singularität}$$

Komplexe Fourier-Reihe:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in \frac{2\pi}{T} t}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{C}$$

$$c_n = \langle e^{in\omega t}, f \rangle = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} e^{-in\omega t} \cdot f(t) dt$$

Bekannte Fourier-Reihen

Mit h kann man die Amplitude der Kurve bestimmen.

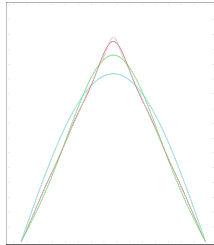
Dreieckspuls

$$f(t) = -\frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)\omega t)}{(2k-1)^2}$$

$$= -\frac{8h}{\pi^2} \left[\cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3 \omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5 \omega t + \dots \right]$$

$$f(t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin((2k-1)\omega t)}{(2k-1)^2}$$

$$= \frac{8h}{\pi^2} \left[\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5 \omega t - \dots \right]$$



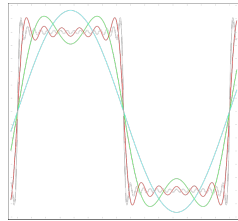
Rechteckpuls

$$f(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\omega t)}{2k-1}$$

$$= \frac{4h}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots \right]$$

$$f(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos((2k-1)\omega t)}{2k-1}$$

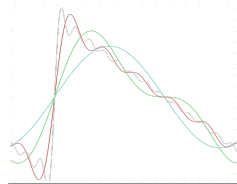
$$= \frac{4h}{\pi} \left[\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega t + \frac{1}{5} \cos 5 \omega t - \dots \right]$$



Sägezahnimpuls (steigend)

$$f(t) = -\frac{2h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k \omega t}{k}$$

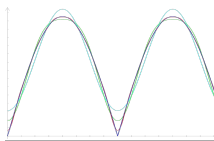
$$= -\frac{2h}{\pi} \left[\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2 \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t - \dots \right]$$



Sinusimpuls

$$f(t) = t |\sin \omega t| = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k \omega t}{(2k)^2 - 1}$$

$$= \frac{4h}{\pi} \left[\frac{1}{2} \cos 2 \omega t - \frac{\cos 4 \omega t}{15} - \frac{\cos 6 \omega t}{35} - \dots \right]$$



Fourier-Transformation

Analyse: $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot f(t) dt$

Synthese: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot \hat{f}(\omega) d\omega$

Faltungsprodukt:

$$(f * g)(x) := \int f(x-t)g(t) dt = \int f(t)g(x-t) dt, x \in \mathbb{R}$$

$$f * g = g * f, (f * g) * h = f * (g * h)$$

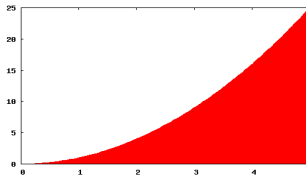
$$(\alpha f_1 + \beta f_2) * g = \alpha f_1 * g + \beta f_2 * g (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

$$(T_h f) * g = T_h(f * g), (h \in \mathbb{R})$$

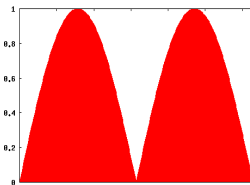
Eine Funktion f heisst integrierbar wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ konvergiert.

Es lassen sich also nur schnell abklingende Funktionen verwenden.

Beispiele:



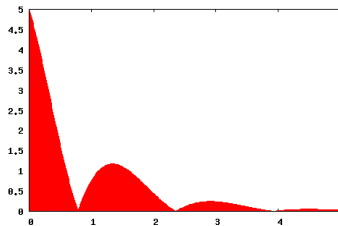
$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^2 dt = \infty \quad \text{Nicht integrierbar!}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin(t + \phi)| dt = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\cos(t + \phi)| dt = \infty$$

Nicht integrierbar!



$$\lim_{t \rightarrow \infty} |5 \cdot e^{t(-1-2i)}| = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |5 \cdot e^{t(-1-2i)}| dt \quad \text{Integrierbar}$$

Möbiustransformation

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow z = T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

- Eine Drehstreckung
- Immer reversibel
- Kreistreue (Führen **Kreise in Kreise** über)

Laplace-Transformation

$$Lf(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, s \in \mathbb{C}$$

- Transformation von Zeit in Bildbereich.
- Wie Fourier-Transformation, **nur lässt Laplace auch divergente Funktionen zu.**
- Nimmt alle Funktionswerte für $t < 0$ gleich 0 an
- Korrespondenz schreibt sich: $f(t) \leftrightarrow L(s)$

Beispiele:

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$Lf(s) = \int_0^{\infty} \cos(\omega t) e^{-st} dt = \Re \int_0^{\infty} e^{t(-s+i\omega)} dt = \Re \left. \frac{e^{t(-s+i\omega)}}{-s+i\omega} \right|_{t=0}^{\infty}$$

$$= \Re \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Liste von gängigen Korrespondenzen (via Blatter+Wikipedia)

$\cos(\omega t)$	\leftrightarrow	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	\leftrightarrow	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	\leftrightarrow	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	\leftrightarrow	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
1	\leftrightarrow	$\frac{1}{s}$
t^n	\leftrightarrow	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	\leftrightarrow	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{s}}$

$e^{\lambda t}$	\leftrightarrow	$\frac{1}{s-\lambda}$
$f(t-h)$	\leftrightarrow	$e^{-hs} F(s)$
$f(\alpha t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
$e^{\lambda t} f(t)$	\leftrightarrow	$F(s-\lambda)$
$t f(t)$	\leftrightarrow	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	\leftrightarrow	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$-t f(t)$	\leftrightarrow	$F'(s)$
$t^2 f(t)$	\leftrightarrow	$F''(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	\leftrightarrow	$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$
$f'(t)$	\leftrightarrow	$s F(s) - f(0)$
$f''(t)$	\leftrightarrow	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	\leftrightarrow	$\frac{F(s)}{s}$
$\frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_0^t f(t-q)^{n-1} f(q) dq, n \geq 1$	\leftrightarrow	$\frac{F(s)}{s^n}, n \geq 1$
$\int_0^t f(u) g(t-u) du$ (Faltung)	\leftrightarrow	$F(s)G(s)$ (Multiplikation)
$f(t)g(t)$ (Multiplikation)	\leftrightarrow	$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\sigma)g(s-\sigma) d\sigma$ (Faltung)
\sqrt{t}	\leftrightarrow	$\frac{\pi}{2s^{\frac{3}{2}}}$
$\sqrt[n]{t}$	\leftrightarrow	$s^{-\frac{n+1}{n}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\ln(at)$		$-\frac{1}{s} \left(\ln\left(\frac{s}{a}\right) + \gamma \right)$
$\cos(\omega t) \cdot f(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-i\omega) + F(s+i\omega))$
$\sin(\omega t) \cdot f(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{2i} \cdot (F(s-i\omega) - F(s+i\omega))$
$\cosh(\omega t) \cdot f(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-\omega) + F(s+i\omega))$
$\sinh(\omega t) \cdot f(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-\omega) - F(s+i\omega))$
$\sum_0^\infty a_n (t-t_0)^n$	\leftrightarrow	$\sum_0^\infty \frac{a_n n!}{s^{n+1}} e^{t_0 s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}$	\leftrightarrow	$(s+a)^{-n}$
$1 - e^{-at}$	\leftrightarrow	$\frac{a}{s(s+a)}$
$t e^{-at}$	\leftrightarrow	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	\leftrightarrow	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$		$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

Lösen von DGL mit Laplace

Beispiel Federpendel:

$$m \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + f y(t) = K \cos(\omega t), (t \geq 0)$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(s)$$

$$\dot{y}(t) \leftrightarrow s Y(s) - y_0$$

$$\ddot{y}(t) \leftrightarrow s^2 Y(s) - s y_0 - v_0$$

$$\Rightarrow m \cdot (s^2 Y(s) - s y_0 - v_0) + b \cdot (s Y(s) - y_0) + f \cdot Y(s) = K \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow (m s^2 + b s + f) Y(s) = K \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + (m s + b) y_0 + m v_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{f}{m}}, b=0 \\ \omega_* = \sqrt{\omega_0^2 - r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow (s^2 + \omega_0^2) Y(s) = \frac{K}{m} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + s y_0 + v_0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{K}{m} \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \omega_0^2)}$$

$$\rightarrow \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{As+B}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{Cs+D}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{K}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \left(\frac{s}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

$$\leftrightarrow f(t) = \frac{K}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t))$$

Diese Lösung unter der Annahme dass y_0 und v_0 gleich null sind.

Linienintegral

Wie bei Teichi $\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$

Auch die Bogenlänge analog zum Reellen:

$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

Beispiel „Zirkulation“:

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{d}{dt} e^{it} dt = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) i e^{it} dt$$

Partielle Integration

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Rechnen mit dem Donut (Komposition/Verknüpfung)

$$(u \circ v)(x) := u(v(x))$$

$$\frac{\delta(u \circ v)}{\delta x}(x_0) = u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$$

Polynom² lösen (nützlich)

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Partialbruchzerlegung (nützlich)

$$\frac{A}{q_1(x)} + \frac{B}{q_2(x)} = \frac{c}{q_1(x)q_2(x)}$$

$$\Rightarrow A \cdot q_2(x) + B \cdot q_1(x) = c$$

$$\Rightarrow (A+B) \cdot \alpha + \beta A - \gamma B = c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ \beta A - \gamma B = c \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauß}} [A, B]$$

Selbiges für n Quotienten (A,B,C,D,...)!

Beispiel

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{1}{(x-2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow A \cdot (x+3) + B \cdot (x-2) = 1$$

$$\Rightarrow (A+B) \cdot x + 3A - 2B = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-2B=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauß}} \left[A = \frac{1}{5}, B = -\frac{1}{5} \right]$$

Hierbei kann der Quotient auch eine Potenz sein $q_k(x) = (x-3)^3$

Integrale und Ableitungen

Tabelle von Ableitungs- und Stammfunktionen

Potenz- und Wurzelfunktionen	
Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
0	0
k (k ∈ ℝ)	kx
x ⁿ	$\begin{cases} \frac{1}{n+1} x^{n+1} & n \neq -1 \\ \ln x & n = 1 \end{cases}$
f'(x) · f ⁿ (x)	$\frac{1}{n+1} f^{n+1}(x)$

n x ⁿ⁻¹	x ⁿ
x	$\frac{1}{2} x^2$
2x	x ²
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{x})^3 = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} (\sqrt[n]{x})^{n+1}$
3x ²	x ³
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	2 \sqrt{x}
$\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$	$\sqrt[n]{x}$
$-\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
Exponential- und Logarithmusfunktionen	
Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
e ^x	e ^x
e ^{k·x}	$\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}$
a ^x ln(a) = a ^x log _e (a), a > 0	a ^x
a ^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} = \frac{a^x}{\log_e(a)}$
x ^x (1 + ln(x))	x ^x , x > 0
e ^{x ln x} (ln x + 1)	x ^x = e ^{x ln x} , x ≠ 0
$\frac{1}{x}$	ln x
ln(x)	x · ln(x) - x
u'(x) · ln(u(x))	u(x) · ln(u(x)) - u(x)

$\frac{1}{x} \ln^n x, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} \ln^{n+1} x$
$\frac{1}{x} \ln x^n, n \neq 0$	$\frac{1}{2n} \ln^2 x^n = \frac{n}{2} \ln^2 x$
$\frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$	log _a x
$\frac{1}{x \ln x}$	ln ln x , x > 0, x ≠ 1
log _a x	$\frac{1}{\ln a} (x \ln x - x)$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$
Trigonometrische und Hyperbelfunktionen	
Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
sin x	-cos x
cos x	sin x
sin ² x	$\frac{1}{2} (x - \sin x \cdot \cos x)$
cos ² x	$\frac{1}{2} (x + \sin x \cdot \cos x)$
sin ax cos ax	$-\frac{1}{2a} \cos^2 ax$
tan x	-ln cos x
cot x	ln sin x
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	tan x
$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	cot x
arcsin x	x arcsin x + $\sqrt{1-x^2}$
arccos x	x arccos x - $\sqrt{1-x^2}$

$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$	$\frac{1}{1-x^2}, x < 1$	$\operatorname{artanh} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{1-x^2}, x > 1$	$\operatorname{arcoth} x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\sin^2 kx$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2kx)}{4k}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	$\cos^2 kx$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2kx)}{4k}$
$\frac{x^2}{x^2+1}$	$x - \arctan x$	Sonstige	
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x \right)$	Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$	e^{-x^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Erf}f(x)$
$\cosh x$	$\sinh x$	e^{-ax^2+bx+c}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{\frac{b^2+c}{4a}} \operatorname{Erf}f\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$
$\tanh x$	$\ln \cosh x$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$\coth x$	$\ln \sinh x $	$u'(x) \cdot u(x)$	$\frac{1}{2} (u(x))^2$
$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\tanh x$	Rekursionsformeln für weitere Stammfunktionen	
$\frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$\coth x$	$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx, n \geq 2$	
$\operatorname{arsinh} x$	$x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$	$\int \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2}(x) dx - \frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x), n \geq 2$	
$\operatorname{arcosh} x$	$x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$	$\int \cos^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2}(x) dx + \frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x), n \geq 2$	
$\operatorname{artanh} x$	$x \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$	Ableitung der Umkehrfunktion	
$\operatorname{arcoth} x$	$x \operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2} \ln(x^2-1)$	$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \vee f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$	Mittelwertsatz	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$	$\operatorname{arcosh} x$	Zwischen zwei Punkten mit gleichem $f(x)$ gibt es mindestens einen Punkt mit $f'(x) = 0$, falls f stetig und differenzierbar ist.	
		Newton-Iteration	
		Konvergiert gegen eine Nullstelle. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	

Taylorreihen

Approximieren eine Funktion in der Nähe von x_0 durch ein Polynom.

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x-x_0)^2 + \dots$$

Fehlerabschätzung: $\sup \xi = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$

Limites

Bernoulli de l'Hôpital

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty} \Leftrightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Rechenregeln

$$\begin{aligned} \lim (f(x)^n) &= (\lim f(x))^n \\ \lim (\log(f(x))) &= \log(\lim f(x)) \\ \lim \sqrt[n]{f(x)} &= \sqrt[n]{\lim f(x)} \\ \lim a^{f(x)} &= a^{\lim f(x)} \end{aligned}$$

Bekannte Limites

Limes	Gegen	Wert
$\frac{\sin x}{x}$	0	1
$\frac{a^x - 1}{x}$	0	$\ln(a) = \log_e a$
$\frac{\ln x}{x-1}$	0	1
$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\log_e(1+x)}{x}$	0	1
$\frac{\log_a(1+x)}{x}$	0	$\frac{1}{\ln(a)}$
$x^m e^{-ax}$	∞	0 fall $a > 0$
$x^m e^{-\frac{a}{x}}$	0	0, substituiere $y = \frac{1}{x}$
$x^a \ln(x)$	0	0 fall $a > 0$
$x^{-a} \ln(x)$	∞	0 fall $a > 0$

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$	∞	e^x		$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$	$\log_e \frac{1}{1-z}$
$\frac{e^n - 1}{n}$	0	1		$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{c+k-1}{k} a^k z^k$	$\frac{1}{(1-az)^c}$
Reihen			trigonometrische Reihen	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	$\sin(x)$
Bekannte Reihen				$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	$\cos(x)$
Name	Reihe	Wert		$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$\sinh(x)$
geometrische Partialsumme	$\sum_{i=0}^n q^i$	$\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$		$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$\cosh(x)$
geometrische Reihe	$\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k$	Falls $ q < 1$: $a \cdot \frac{1}{1-q}$ Sonst: <i>divergent</i>			
harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$	divergent			
alternierende Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$	konvergiert falls a_k monoton fallend gegen 0			
alternierende harmon. Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots$	$\ln(2) = \log_e(2)$			
binomische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot z^k$	$\alpha \in \mathbb{N}$: $(1+z)^\alpha, \rho = \infty$ sonst: $\rho = 1$			
Exponentialreihe	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$	e^z			
Potenzreihen	$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot z^k$	$\frac{z}{(1-z)^2}$			
	$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot z^k$	$\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$			
	$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot z^k$	$\frac{1}{1-\alpha z}$			