

**Komplexe Zahlen**

**Rechenregeln**

$$z = x + y \cdot i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y \cdot i}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}{(x_2 + i \cdot y_2) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}$$

**Koordinaten**

*Polar (Kreis: winkel, radius)*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

*Sphärisch (Kugel: radius und zwei winkel)*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\sin \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

*Zylinder (Höhe sowie radius und winkel)*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

**Limite**

**Bernoulli de l'Hôpital**

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty} \Leftrightarrow \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Rechenregeln**

$$\lim (f(x)^n) = (\lim f(x))^n$$

$$\lim (\log(f(x))) = \log(\lim f(x))$$

$$\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$$

$$\lim a^{f(x)} = a^{\lim f(x)}$$

**Bekannte Limite**

Limes	Gegen	Wert
$\frac{\sin x}{x}$	0	1
$\frac{a^x - 1}{x}$	0	$\ln(a) = \log_e a$
$\frac{\ln x}{x-1}$	0	1
$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\log_e(1+x)}{x}$	0	1
$\frac{\log_a(1+x)}{x}$	0	$\frac{1}{\ln(a)}$

$x^m e^{-ax}$	$\infty$	0 fall $a > 0$
$x^m e^{-\frac{a}{x}}$	0	0, substituiere $y = \frac{1}{x}$
$x^a \ln(x)$	0	0 fall $a > 0$
$x^{-a} \ln(x)$	$\infty$	0 fall $a > 0$
$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$	$\infty$	$e^x$
$\frac{e^n - 1}{n}$	0	1

**Reihen**

**Bekannte Reihen**

Name	Reihe	Wert
geometrische Partialsumme	$\sum_{i=0}^n q^i$	$\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
geometrische Reihe	$\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k$	Falls $ q  < 1$ : $a \cdot \frac{1}{1 - q}$ Sonst: <i>divergent</i>
harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$	divergent
alternierende Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$	konvergiert falls $a_k$ monoton fallend gegen 0
alternierende harmon. Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots$	$\ln(2) = \log_e(2)$
binomische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot z^k$	$\alpha \in \mathbb{N}$ : $(1+z)^\alpha, \rho = \infty$ sonst: $\rho = 1$
Exponentialreihe	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$	$e^z$
Potenzreihen	$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot z^k$	$\frac{z}{(1-z)^2}$
	$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot z^k$	$\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$

	$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot z^k$	$\frac{1}{1 - \alpha z}$
	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$	$\log_e \frac{1}{1-z}$
	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{c+k-1}{k} a^k z^k$	$\frac{1}{(1-az)^c}$
trigonometrische Reihen	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	$\sin(x)$
	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	$\cos(x)$
	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$\sinh(x)$
	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$\cosh(x)$

**Konvergenzradius einer Potenzreihe**

Konvergenz:  $z < \rho$   
Divergenz:  $z > \rho$   
Untersuchung nötig:  $z = \rho$

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

**Potenzreihe selbst berechnen**

Bsp.:

$$f(x) = \frac{2}{1-x+x^2-x^3} =_{PBZ} \frac{1}{1-x} + \frac{1+x}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \wedge \frac{1+x}{1+x^2} = (1+x) \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x^{2k} + x^{2k+1})$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + (-1)^k) (x^{2k} + x^{2k+1}) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k} + x^{4k+1} \Rightarrow \rho = 1$$

**Konvergenzkriterien**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rightarrow (L < 1 \Rightarrow \text{Konvergenz}, L > 1 \Rightarrow \text{Divergenz})$$

**Quotientenkriterium**

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

**Wurzelkriterium**

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

**Majorantenkriterium**

Falls ab einem k alle  $|a_k| \leq |b_k|$  dann konvergiert mit der Reihe b auch a

**Integalkriterium**

$f(x) \geq 0$  monoton fallend, bzw monoton steigend  $f(x) \leq 0$

$\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$  konvergiert genau dann wenn  $\int_p^{\infty} f(x) dx$  existiert

**Cauchy**

konvergiert genau dann wenn  $\lim_{n, l \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=l}^n a_k \right| \rightarrow 0$

**Integrale und Ableitungen**

Tabelle von Ableitungs- und Stammfunktionen

Potenz- und Wurzelfunktionen	
Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
0	0
$k (k \in \mathbb{R})$	$kx$
$x^n$	$\begin{cases} \frac{1}{n+1} x^{n+1} & n \neq -1 \\ \ln x  & n = -1 \end{cases}$
$f'(x) \cdot f^n(x)$	$\frac{1}{n+1} f^{n+1}(x)$
$n x^{n-1}$	$x^n$
$x$	$\frac{1}{2} x^2$
$2x$	$x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{x})^3 = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} (\sqrt[n]{x})^{n+1}$
$3x^2$	$x^3$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$	$\sqrt[n]{x}$
$-\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}$

$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
Exponential- und Logarithmusfunktionen	
Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
$e^x$	$e^x$
$e^{k \cdot x}$	$\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}$
$a^x \ln(a) = a^x \log_e(a), a > 0$	$a^x$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln(a)} = \frac{a^x}{\log_e(a)}$
$x^x(1 + \ln(x))$	$x^x, x > 0$
$e^{x \ln x } (\ln x  + 1)$	$ x ^x = e^{x \ln x }, x \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
$u'(x) \cdot \ln(u(x))$	$u(x) \cdot \ln(u(x)) - u(x)$
$\frac{1}{x} \ln^n x, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} \ln^{n+1} x$
$\frac{1}{x} \ln x^n, n \neq 0$	$\frac{1}{2n} \ln^2 x^n = \frac{n}{2} \ln^2 x$
$\frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$	$\log_a x$
$\frac{1}{x \ln x}$	$\ln \ln x , x > 0, x \neq 1$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a} (x \ln x - x)$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$
Trigonometrische und Hyperbelfunktionen	
Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

$\sin^2 x$	$\frac{1}{2} (x - \sin x \cdot \cos x)$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2} (x + \sin x \cdot \cos x)$
$\sin ax \cos ax$	$-\frac{1}{2a} \cos^2 ax$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$\cot x$	$\ln \sin x $
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$\cot x$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\frac{x^2}{x^2+1}$	$x - \arctan x$
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} + \arctan x \right)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln \cosh x$
$\coth x$	$\ln \sinh x $
$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\tanh x$
$\frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$	$\coth x$
$\operatorname{arsinh} x$	$x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$

$\operatorname{arcosh} x$	$x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2 - 1}$
$\operatorname{artanh} x$	$x \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$
$\operatorname{arcoth} x$	$x \operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{1}{1 - x^2},  x  < 1$	$\operatorname{artanh} x$
$\frac{1}{1 - x^2},  x  > 1$	$\operatorname{arcoth} x$
$\sin^2 kx$	$\frac{x}{2} \cdot \frac{\sin(2kx)}{4k}$
$\cos^2 kx$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2kx)}{4k}$
Sonstige	
Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$e^{-x^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Erf}(x)$
$e^{-ax^2 + bx + c}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{\frac{b^2 + c}{4a}} \operatorname{Erf}\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$u'(x) \cdot u(x)$	$\frac{1}{2} (u(x))^2$

**Rekursionsformeln für weitere Stammfunktionen**

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} dx, n \geq 2$$

$$\int \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2}(x) dx - \frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x), n \geq 2$$

$$\int \cos^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2}(x) dx + \frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x), n \geq 2$$

**Ableitung der Umkehrfunktion**

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \vee f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

**Mittelwertsatz**

Zwischen zwei Punkten mit gleichem  $f(x)$  gibt es mindestens einen Punkt mit  $f'(x) = 0$ , falls  $f$  stetig und differenzierbar ist.

**Newton-Iteration**

Konvergiert gegen eine Nullstelle.  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

**Taylorreihen**

Approximieren eine Funktion in der Nähe von  $x_0$  durch ein Polynom.

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$

Fehlerabschätzung:  $\sup \xi = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

**Bogenlänge**

Falls  $y=f(x)$  in  $[a,b]$ :  $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Falls  $x=x(t), y=y(t)$  in  $[a,b]$ :  $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

**Differentialgleichungen**

Ansätze

Inhomogenität	Falls	Ansatz
Polynom Grad $m$	0 keine NS	$\sum_{n=0}^m (a_n \cdot x^n)$
	0 $k$ -fache NS	$x^k \cdot \sum_{n=0}^m (a_n \cdot x^n) = \sum_{n=0}^m (a_n \cdot x^{n+k})$
$\sin(\omega t), \cos(\omega t)$	$i\omega$ keine NS	$a \cdot \sin(\omega t) + b \cdot \cos(\omega t)$
	$i\omega$ $k$ -fache NS	$x^k \cdot (a \cdot \sin(\omega t) + b \cdot \cos(\omega t))$
$e^{cx}$	$c$ keine NS	$a \cdot e^{cx}$
	$c$ $k$ -fache NS	$a \cdot x^k \cdot e^{cx}$
$e^{cx} \cdot \sin(\omega x)$	$a + ib$ keine NS	$e^{cx} (a_1 \sin(\omega x) + a_2 \cos(\omega x))$
$e^{cx} \cdot \cos(\omega x)$	$a + ib$ $k$ -fache NS	$x^k \cdot e^{cx} \cdot (a_1 \sin(\omega x) + a_2 \cos(\omega x))$
(Polynom mit grad $m$ ) $\cdot e^{cx}$	$c$ keine NS	$e^{cx} \cdot \sum_{n=0}^m (a_n \cdot x^n)$
	$c$ $k$ -fache NS	$x^k e^{cx} \cdot \sum_{n=0}^m (a_n \cdot x^n) = e^{cx} \cdot \sum_{n=0}^m (a_n \cdot x^{n+k})$

(Polynom mit grad $m$ ) $\cdot \sin(\omega t)$ , (Polynom mit grad $m$ ) $\cdot \cos(\omega t)$	$i\omega$ keine NS	$\sin(\omega t) \cdot \sum_{n=0}^m (a_n \cdot t^n)$ $+ \cos(\omega t) \cdot \sum_{n=0}^m (b_n \cdot t^n)$
	$i\omega$ $k$ -fache NS	$t^k \left( \sin(\omega t) \cdot \sum_{n=0}^m (a_n \cdot t^n) + \cos(\omega t) \cdot \sum_{n=0}^m (b_n \cdot t^n) \right)$
$\cosh, \sinh$	benutze Definition	siehe $e^{cx}$

**Separierbar**

**Homogen**

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

Allgemeine Lösung:  $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$

Partikuläre Lösung: Anfangswertproblem um  $(x_0, y_0)$ :

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(y)} dy = \int_{x_0}^x g(x) dx$$

Formen wie  $\log|y| = \log|f(x)| + c$  werden dabei zu  $y = c \cdot f(x)$

**Inhomogen**

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y) + f(x)$$

Löse zuerst homogen, dann Variation der Konstanten

**Variation der Konstanten**

Sei die Lösung der homogenen DGL 1. Ordnung  $c \cdot h(x)$  und die Inhomogenität  $f(x)$ . Setze  $c = c(x)$  und setze dann in die DGL ein. Vorsicht: Produktregel mit  $c(x)$ !

Beispiel:

$$y' = \frac{-2x}{1+x^2} \cdot y + 8x$$

Homogene Lsg. (Separation):

$$y = \frac{c}{1+x^2} \Rightarrow y' = \frac{-c(x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} + \frac{c'(x)}{1+x^2} \quad (\text{Produktregel!})$$

Einsetzen in DGL:

$$\frac{-c(x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} + \frac{c'(x)}{1+x^2} = \frac{-2x}{1+x^2} \cdot \frac{c(x)}{1+x^2} + 8x$$

$$\Leftrightarrow c'(x) = 8x^3 + 8x \Rightarrow c(x) = 2x^4 + 4x^2 + \alpha \Rightarrow \text{inhomogene Lsg.: } \frac{2x^4 + 4x^2 + \alpha}{1+x^2}$$

**Differentialrechnung**

**Gradient**

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \text{ Zeigt in Richtung der max. Steigung ( } |\nabla f| \text{ )}$$

**Richtungsableitung**

$$D_v f = \frac{\langle \nabla f, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|}$$

Steigung in Richtung  $\vec{v}$  : Projektion von  $\vec{v}$  auf  $\nabla f$

**Tangentialebene**

im Punkt  $P_0$   $\left\langle \nabla f(P_0), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P_0 \right\rangle = 0$  (Abgebrochene Taylorentwkl.)

in 2D:  $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

**Kettenregel**

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \langle f'(\vec{x}(t)), \vec{x}'(t) \rangle$$

**Jacobi-Matrix**

$$D_f = D^1 f = \begin{pmatrix} \left( \frac{\delta f_1}{\delta x_1} \right) & \left( \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \right) & \left( \frac{\delta f_1}{\delta x_3} \right) & \dots & \left( \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \right) \\ \left( \frac{\delta f_2}{\delta x_1} \right) & \left( \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \right) & \left( \frac{\delta f_2}{\delta x_3} \right) & \dots & \left( \frac{\delta f_2}{\delta x_n} \right) \\ \left( \frac{\delta f_3}{\delta x_1} \right) & \left( \frac{\delta f_3}{\delta x_2} \right) & \left( \frac{\delta f_3}{\delta x_3} \right) & \dots & \left( \frac{\delta f_3}{\delta x_n} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \frac{\delta f_m}{\delta x_1} \right) & \left( \frac{\delta f_m}{\delta x_2} \right) & \left( \frac{\delta f_m}{\delta x_3} \right) & \dots & \left( \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \right) \end{pmatrix}$$

Bedingung für regularen Punkt:  $df(p_0)$  hat vollen Rang

**Hesse-Matrix**

$$H_f = H(f) = \nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \text{ mehrdimensional analog!}$$

**Finden globaler Extrema**

1. Innen
  1. löse  $\nabla f = 0$  finde dabei zB Punkt  $p_0$
  2. Überprüfe ob  $p_0$  wirklich im Bereich liegt

3. Berechne die Eigenwerte von  $H(p_0)$ . Falls:
  - alle positiv: lokales Minimum
  - alle negativ: lokales Maximum
  - alle positiv oder negativ: Sattelpunkt
  - sonst: Entartet

In 2D gilt:

$$A = \det H(p_0) = f_{xx}(p_0)f_{yy}(p_0) - f_{xy}^2(p_0)$$

$A > 0 \wedge f_{xx}(p_0) > 0$ :  $p$  lokales Minimum  
 $A > 0 \wedge f_{xx}(p_0) < 0$ :  $p$  lokales Maximum  
 $A < 0$  Sattelpunkt  
 $A = 0$  Entartet

2. Rand

Sei  $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$  Die Gleichung des Randes

1. Finde nichtreguläre Punkte:  $\nabla g = 0$  bzw. bei mehreren Nebenbedingungen:  $dg$  hat nicht vollen Rang
2. Löse  $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$  für reguläre Punkte  
 $g$  gibt dabei eine weitere Gleichung für das Gleichungssys.

3. Ecken

4. Vergleiche die Funktionswerte aller gefundenen Punkte!

**Lagrange-Multiplikator**

Nebenbedingungen:  $g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 0$  (Wenn nötig umform.)

$$h(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + g_1(x, y, z) \cdot \lambda_1 + g_2(x, y, z) \cdot \lambda_2$$

$$\nabla h(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \vec{0}$$

Dann mit (zB. Gauß) weiter lösen

**Taylorreihen**

**1-D**

$$T_f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

**2-D**

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \Rightarrow f(\vec{x}_0) = f(x_0, y_0)$$

$$f(\vec{x}_0) + f_x(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) + f_y(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot (f_{xx}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot f_{xy}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + f_{yy}(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0)^2)$$

$$+ \frac{1}{3!} \cdot (f_{xxx}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0)^3 + 3 \cdot f_{xxy}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0)^2 \cdot (y - y_0)$$

$$+ 3 \cdot f_{xyy}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0)^2 + f_{yyy}(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0)^3)$$

$$+ \dots + \frac{1}{N!} \binom{N}{0} f_x(x - x_0)^N + \binom{N}{1} f_{x^{N-1}y}(x - x_0)^{N-1} (y - y_0) + \dots$$

**3-D**

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \Rightarrow f(\vec{x}_0) = f(x_0, y_0, z_0)$$

$$f(\vec{x}_0) + f_x(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) + f_y(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0) + f_z(\vec{x}_0) \cdot (z - z_0)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot (f_{xx}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0)^2 + f_{yy}(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0)^2 + f_{zz}(\vec{x}_0) \cdot (z - z_0)^2$$

$$+ 2 \cdot f_{xy}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + 2 \cdot f_{xz}(\vec{x}_0) \cdot (x - x_0) \cdot (z - z_0)$$

$$+ 2 \cdot f_{yz}(\vec{x}_0) \cdot (y - y_0) \cdot (z - z_0) + \dots$$

**m-D**

$$T_2 f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + D_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$T_n f(\vec{x}) = \sum_{i=0}^n D^i f(\vec{x}_0) \cdot \frac{1}{i!} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)^i$$

**Satz über implizite Funktionen**

Seien  $x, y$  Vektoren,  $F(x, y)$  eine stetig diffbare Abbildung und  $F(x_0, y_0) = 0$ .

Falls die Jacobi-Matrix  $\frac{\delta(F_1, \dots, F_n)}{\delta(y_1, \dots, y_n)}$  in  $(x_0, y_0)$  invertierbar ist, so

existieren offene Umgebungen von  $x_0$  und  $y_0$  und eine eindeutige, stetig diffbare Abbildung  $\varphi(x)$  mit  $F(x, \varphi(x)) = 0$ .

Ausserdem gilt:  $\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$  resp.  $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$

Beispiel:

Gegeben:  $x^4 - 5x^3y^2 + 6xy^3 = \text{const}, x_0 = 2, y_0 = 1$

Gesucht: Näherung für  $\Delta y$  für  $\Delta x = 0.001$

Lösung:  $f_y(2, 1) = -44 \neq 0 \Rightarrow$  Satz über implizite Funktionen

Also gilt:  $\varphi'(2) = -\frac{f_x(2, 1)}{f_y(2, 1)} = -\frac{1}{2}$

Und damit ist  $\Delta y$  etwa  $\varphi' \Delta x = -\frac{1}{2} \cdot 0.001 = -0.0005$

**Satz der lokalen Umkehrbarkeit**

verallgemeinert den Satz über implizite Funktionen in den  $\mathbb{R}^n$ .

Ist die Jacobi-Matrix  $df$  im Punkt  $x_0$  invertierbar, so gibt es eine Umgebung

um  $x_0$  in der eine Umkehrfunktion  $g(x) = f^{-1}(x)$  existiert. Ausserdem gilt:

$$dg(f(x_0)) = (df(x_0))^{-1} ((df(x_0))^{-1} \text{ ist hier die inverse Matrix})$$

**Integralrechnung**  $\mathbb{R}^n$

*Wegintegral*

$$\oint_{\gamma} f ds = \int_{\gamma} f(y(t)) \cdot \|y'(t)\|$$

respektive falls Vektorfeld:  $\oint_{\gamma} f ds = \int_{\gamma} f(y(t)) \cdot y'(t)$

*Satz von Green/Stokes*

Sei  $v(x,y)$  ein Vektorfeld. Dann ist

$$rot(v) = \nabla \times V = \begin{pmatrix} \left(\frac{\delta V_3}{\delta y} - \frac{\delta V_2}{\delta z}\right) \\ \left(\frac{\delta V_1}{\delta z} - \frac{\delta V_3}{\delta x}\right) \\ \left(\frac{\delta V_2}{\delta x} - \frac{\delta V_1}{\delta y}\right) \end{pmatrix} \quad \int_S rot(v) \cdot n do = \oint_{\partial S} v ds$$

$rot(v) = 0 \Leftrightarrow$  Potential existiert

*Beispiel:*

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1, z \leq 1$$

$$v = rot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Fluss durch Oberfläche

Lösung

1. Einsetzen: Bedingung für z einsetzen um den Rand zu finden  
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$
2. Rand parametrisieren, ableiten:  $r = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, r' = \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$
3. Wegintegral berechnen:

$$\begin{aligned} \oint v(r(\varphi)) &= \int_0^{2\pi} rot v(r(\varphi)) r'(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi d\varphi = 8\pi \end{aligned}$$

*Koordinatensubstitution*

Sei  $\Phi$  die Transformation in eine andere Basis. Dann kann man das Integral

$$\int_S v \quad \text{in der neuen Basis ausdrücken als} \quad \int_S v \cdot |det d\Phi|$$

**Oberfläche**

Sei  $\Omega$  ein Körper und  $S$  die Oberfläche, parametrisiert durch  $\Phi(u,v)$ . Dann gilt:

$$\int_S do = \int_{\Omega} |\Phi_u \times \Phi_v| d\mu(u,v) = \iint_{\Omega} |\Phi_u \times \Phi_v| du dv$$

Konkret:

**Fläche im  $\mathbb{R}^2$**   
 $\iint_B f(u,v) \cdot |\Phi_u \times \Phi_v| du dv$

**Fläche im  $\mathbb{R}^3$**   
 $\iint_B f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot |\Phi_u \times \Phi_v| du dv$

*Fluss*

$$\int_S v(\Phi) \cdot \vec{n} do = \pm \int_S v(\Phi) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) d\mu(u,v)$$

wobei  $n$  ein Einheitsnormalenvektor auf dem Flächenelement  $do$  ist.

Bei der Kugel gilt:  $n = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, do = r^2 \cos \theta$

Beim Ellipsoid:  $ndo = \begin{pmatrix} bc \cos^2 \theta \cos \varphi \\ ac \cos^2 \theta \sin \varphi \\ ab \cos \theta \sin \varphi \end{pmatrix}$

*Satz von Gauss*

Das Volumenintegral über die Divergenz ist das Flussintegral über den Rand des Gebietes.

$$div(v) = \frac{\delta v_1}{\delta x} + \frac{\delta v_2}{\delta y} + \frac{\delta v_3}{\delta z} = \int_{\Omega} div(v) d\mu = \int_{\partial \Omega} v \vec{n} do$$

**Die Gamma-Funktion (  $\Gamma(\cdot)$  )**

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$a^{\alpha-1} e^{-t} \leq \frac{1}{t^\alpha} \text{ für } t \geq t_0$$

$$a^{\alpha-1} e^{-t} \leq \frac{1}{t^{1-\alpha}} \text{ sonst}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty \underbrace{t^\alpha}_{\mu} \underbrace{e^{-t}}_{y'} dt = (-t^\alpha e^{-t}) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha) \cdot \alpha = \alpha!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} = \sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

**Heavyside-Funktion**

$$\Theta(x) = \int_0^1 f(x) dx \quad f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \text{für alle } x \in [0, \infty[ : 1 \\ x \rightarrow 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \text{ sonst } 0$$

**Rechnen mit dem Donut (Komposition/Verknüpfung)**

$$(u \circ v)(x) := u(v(x))$$

$$\frac{\delta(u \circ v)}{\delta x}(x_0) = u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$$

**Polynom<sup>2</sup> lösen (nützlich)**

$$a x^2 + b x + c = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}, x_2 = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + b}{2a}$$

**Partialbruchzerlegung (nützlich)**

$$\frac{A}{q_1(x)} + \frac{B}{q_2(x)} = \frac{c}{q_1(x)q_2(x)}$$

$$\Rightarrow A \cdot q_2(x) + B \cdot q_1(x) = c$$

$$\Rightarrow (A+B) \cdot \alpha + \beta A - \gamma B = c \quad \text{Selbiges für n Quotienten (A,B,C,D,...)!}$$

$$\Rightarrow_{\text{GLS}} \begin{cases} A+B=0 \\ \beta A - \gamma B = c \end{cases} \Rightarrow_{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

**Beispiel**

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{1}{(x-2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow A \cdot (x+3) + B \cdot (x-2) = 1$$

$$\Rightarrow (A+B) \cdot x + 3A - 2B = 1$$

$$\Rightarrow_{\text{GLS}} \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow_{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Hierbei kann der Quotient auch eine Potenz sein  $q_k(x) = (x-3)^3$

**Kreuzprodukt**

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{1(n-1)} \\ a_{2(n-1)} \\ \vdots \\ a_{n(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \dots \times \vec{a}_{n-1} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vec{e}_2 & a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n & a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vec{e}_2 & a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n & a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

**Determinante**

1-D ... 3-D

$$A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = \det(a_{11}) = a_{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

**Laplacescher Entwicklungssatz**

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der j-ten Spalte)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der i-ten Zeile)}$$

Beispiel nach erster Zeile

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 2 = 3$$